Električna mjerenja

(pomoćni materijal za predavanja)

Univerzitet Crne Gore

Elektrotehnički fakultet

Mjerenja sa različitom pouzdanošću

- Aritmetička sredina računata po prethodnom obrascu podrazumijeva da su sva mjerenja izvršena sa jednakom pouzdanošću.
- Ukoliko mjerenja imaju različitu pouzdanost, uvode se težinski koeficijenti p_i kao mjera pouzdanosti pojedinačnog mjerenja. Precizna mjerenja imaju veći težinski koeficijent.
- Ako su poznate standardne devijacije, težinske koeficijente p_i možemo odrediti prema izrazu:

$$p_i = \frac{const.}{s_i^2}$$

- Konstanta se može odabrati na način da bude pogodna za računanje.
- Aritmetička sredina za mjerenja sa različitom pouzdanošću se može odrediti na osnovu poznavanja težinskih koeficijenata kao:

$$\overline{x} = \frac{p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}$$

- **Zadatak 4:**
- Mjerenjem otpora različitim metodama dobili smo sljedeće rezultate:

R=[10.08;   10.05; 10.00; 9,95; 10.05]

- Standardne devijacije pojedinačnih mjerenja iznose redom:

s=[0.1; 0.08; 0.11; 0.05; 0.20]

- S obzirom na pouzdanost mjerenja treba odrediti težinske koeficijente pojedinih mjerenja i najvjerovatniju vrijednost otpora.

k=0.1 - proizvoljno odabrana vrijednost konstante

$$p_i = \frac{k}{s_i^2} \Rightarrow p_1 = 10,\ p_2 = 15.625,\ p_3 = 8.64,\ p_4 = 40,\ p_5 = 2.5$$

Najvjerovatnija vrijednost otpora jednaka je aritmetičkoj sredini sa težinskim koeficijentima:

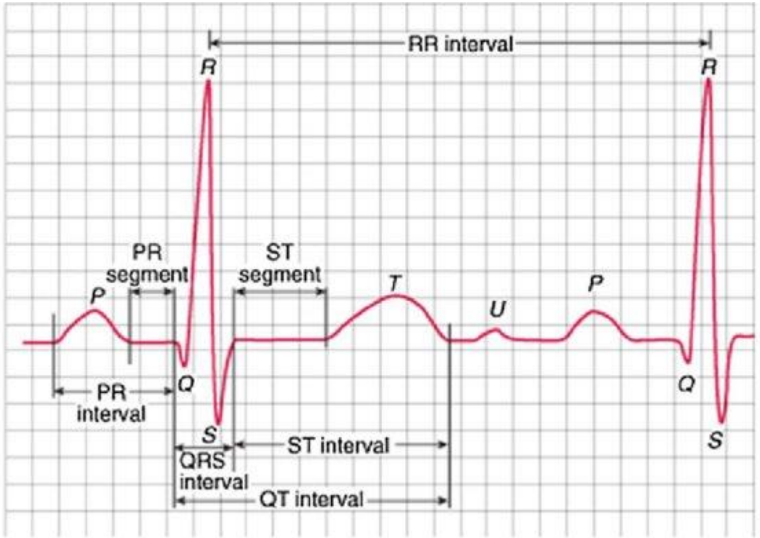
$$\overline{R} = \frac{\sum_{i=1}^{5} p_i R_i}{\sum_{i=1}^{5} p_i} = 9.9\Omega$$

Slučajne promjenljive

- U slučaju kada imamo da su varijacije vrijednosti ponovljenih mjerenja RR intervala rezultat niza faktora čiji se uticaj ne može eksplicitno definisati, smatramo da je raspodjela ponovljenih rezultata mjerenja slučajna.

N		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_{RR}^{n} [s]	ID1	1.0	0.9	0.9	0.9	1	0.9	0.9	0.9	0.9	1.0
	ID2	1.0	1.0	1.0	0.6	1.0	1.0	1.0	1.0	0.7	1.0
	ID3	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.8	0.9	0.8	0.8
	ID4	0.6	0.7	0.8	1.0	1.0	1.0	0.7	0.8	0.9	0.7
	ID5	0.6	0.6	0.6	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	0.6	0.6

Rezultati za 10 ponovljenih mjerenja
širine RR intervala kod EKG signala za 5 različitih osoba



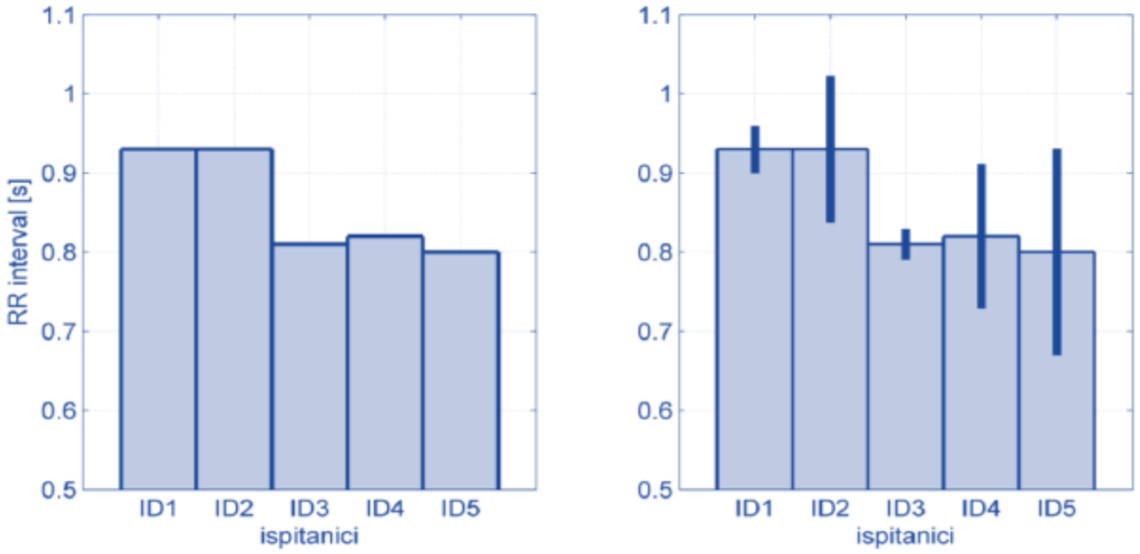
Primijetimo da se svaka vrijednost mjerenja pojavljuje sa određenom vjerovatnoćom

Slučajne promjenljive

- Jedan jednostavan način da se prikaže rezultat za 10 ponovljenih mjerenja, jeste da se izračuna srednja vrijednost ponovljenih mjerenja. Međutim nema dovoljno informacija o pojedinim mjerenjima.
- Zato se uvodi pojam mjerne nesigurnosti koja daje informaciju o rasipanju (raspodjeli) rezultata mjerenja oko srednje vrijednosti.

$$\overline{x} \pm u,\ \ \overline{x} - srednja\ vrijednost,\ u - mjerna\ nesigurnost$$

- Može se zaključiti da nijedan rezultat nije potpun ako ne sadrži informaciju o mjernoj nesigurnosti.
- Mjerna nesigurnost je neizostavni parametar rezultata mjerenja, jer nosi informaciju o pojedinačnim mjerenjima – koju je nemoguće predstaviti isključivo preko srednje vrijednosti mjerene veličine.



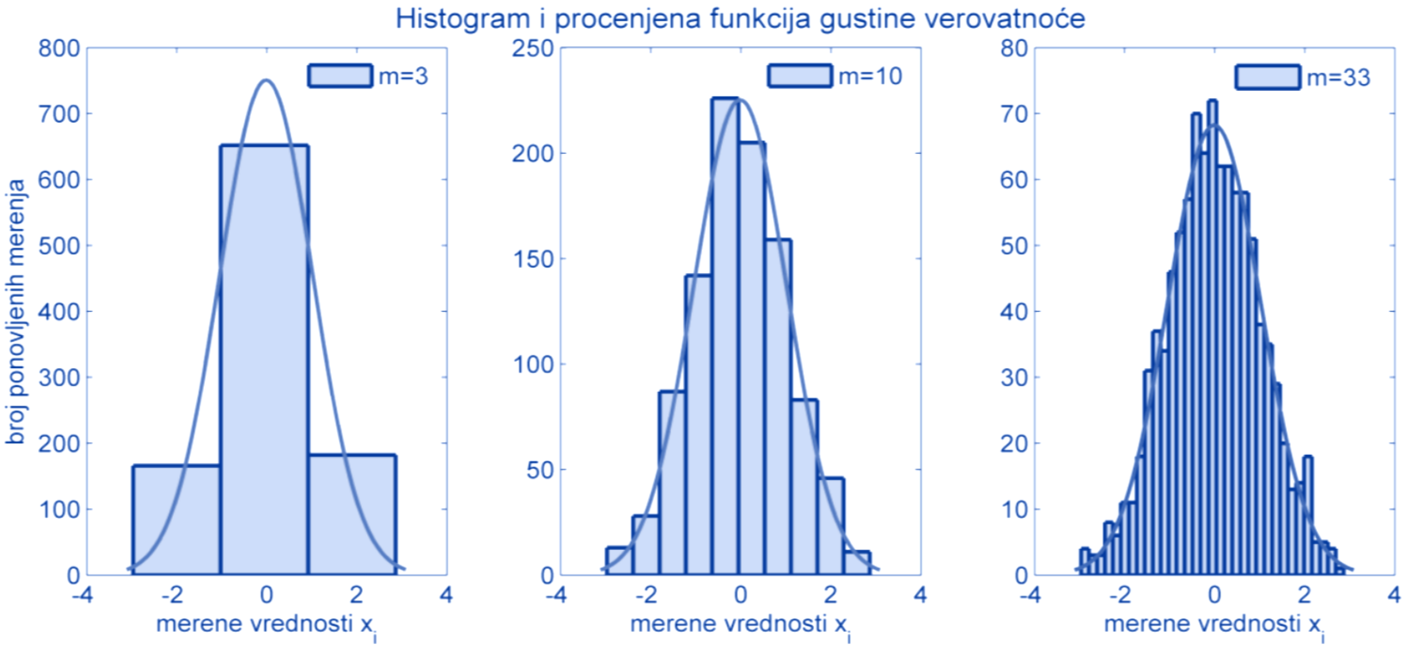
Srednje vrijednosti izmjerenih RR intervala

Slučajne promjenljive i histogram

- **Slučajni karakter rezultata mjerenja** uočava se samo u nizu ponovljenih mjerenja jedne veličine sa istim sredstvom mjerenja i u potpuno jednakim uslovima.
- Vrlo često se u praksi za prikaz rezultata ponovljenih mjerenja koristi **histogram.**
- Na x osi se nalaze mjerene vrijednosti, a na y osi broj ishoda/mjerenja koji imaju te vrijednosti.
- Umjesto za pojedinačne vrijednosti rezultata mjerenja, histogrami se najčešće daju za intervale vrijednosti $\Delta x_k = x_{k+1} - x_k$.

Najvažniji element prilikom predstavljanja rezultata mjerenja pomoću histograma je definisanje broja intervala mjerenja *m* za broj ponovljenih mjerenja *n*. Za opseg mjerenih vrijednosti [x_{min}, x_{max}] obično se odabira **broj intervala mjerenja *m*** kao:

$$m = \sqrt{n} + 1$$



Slučajne promjenljive i histogram

- Analizom histograma jednostavno se utvrđuje koja je vrijednost “najčešće” mjerena. Ta vrijednost je najvjerovatnija (sa najvećom vjerovatnoćom) i vrijednost koja je stoga najbliža tačnoj vrijednosti, odnosno jednaka srednjoj vrijednosti.
- Manje greške javljaju se češće od većih grešaka, odnosno postoji grupisanje mjerenih rezultata oko tačne vrijednosti
- Ukoliko je n_i – broj ishoda odnosno mjerenja u intervalu i , tada važi da je suma po svim intervalima kojih je ukupno m, jednaka ukupnom broju mjerenja n

$$\sum_{i=1}^{m} n_i = n$$

- **n_i se naziva učestanost intervala**
- Ako se sa p_i označi relativan broj mjerenja u intervalu i-tog opsega , tada važi:

$$p_i = \frac{n_i}{n} \Rightarrow \sum_{i=1}^{m} p_i = 1$$

Srednja vrijednost za normalizovani histogram

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{m} p_i x_i$$

Relativna učestanost intervala (p_i) se može tumačiti i kao **vjerovatnoća intervala**.
Gustina vjerovatnoće intervala se dobija kada se relativna učestanost podijeli sa širinom intervala, a rezultujući histogram se naziva **normalizovan histogram**.

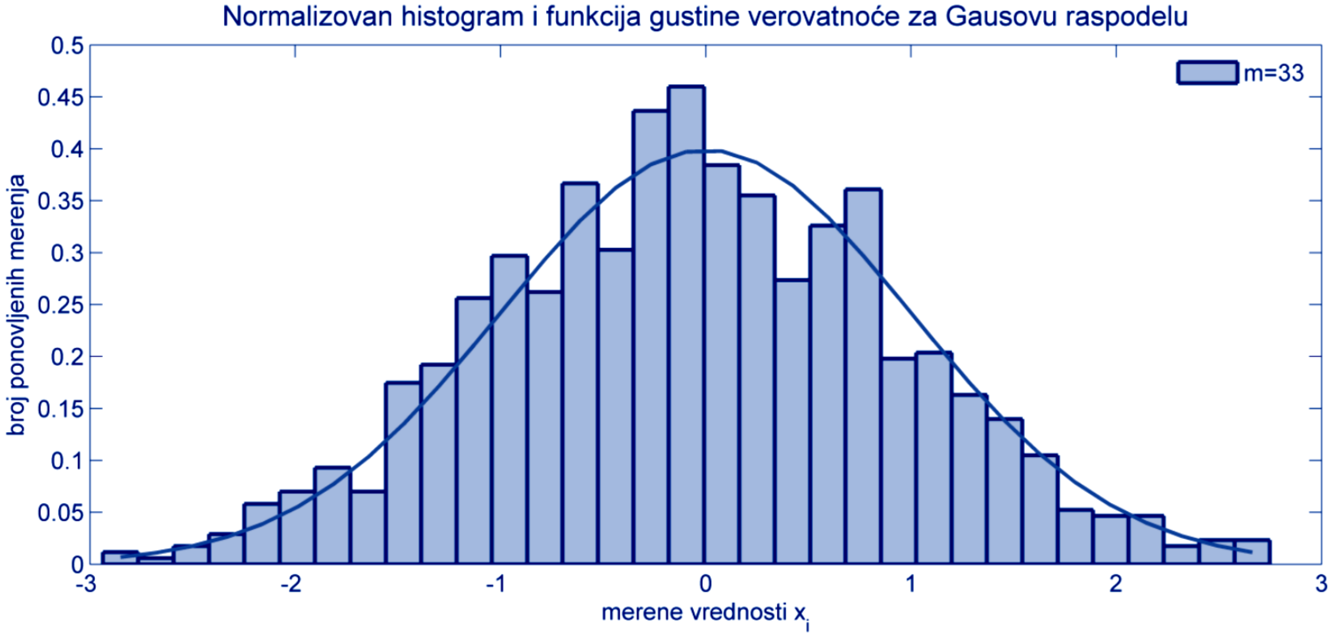
Funkcija gustine vjerovatnoće i funkcija raspodjele vjerovatnoće

- Funkcija gustine vjerovatnoće slučajne promenljive x (mjerene vrijednosti) se predstavlja u oznaci $f(x)$.
- Verovatnoća da će se mjerena vrijednost x naći u intervalu [-∞,+ ∞] je jednaka 1 (100%).
- Funkcije gustine verovatnoće je određena histogramom: na x osi su prikazane mjerene vrijednosti, a na y osi je prikazana vrijednost funkcije gustine verovatnoće koja se, u opštem slučaju, može izraziti u procentima ili normalizovano u opsegu [0, 1].

Normalizovani histogram u ovom slučaju predstavlja diskretan prikaz mjerenja, a funkcija gustine verovatnoće odgovara procjeni u kontinualnom obliku

$$f(x) > 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$



Funkcija gustine vjerovatnoće i Funkcija raspodjele vjerovatnoće

- Pored funkcije gustine vjerovatnoće koja pokazuje kako su rezultati ponovljenih mjerenja raspodijeljeni oko srednje vrijednosti, često se definiše i funkcija raspodjele vjerovatnoće.

- Za mjerenje x_1, funkcija raspodjele vjerovatnoće $F(x_1)$ je jednaka vjerovatnoći nalaženja rezultata mjerenja u intervalu [-∞, x_1] i definiše se kao:

$$F(x_1) = \int_{-\infty}^{x_1} f(x)dx$$

- Funkcija raspodjele vjerovatnoće $F(x)$ je monotono neopadajuća funkcija.

Funkcija raspodjele vjerovatnoće i funkcija gustine vjerovatnoće

- Vjerovatnoća P da mjerena veličina X uzima vrijednosti u opsegu $[x_1, x_2]$ odnosno $\mathrm{P}(x_1 < x < x_2)$:

$$P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

Dokazati ???

$$P(x_1 < X < x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

- Ove dvije funkcije su jednoznačno povezane, odnosno ako je poznata funkcija raspodjele vjerovatnoće $F(x)$, onda se jednostavno može odrediti i funkcija gustine vjerovatnoće $f(x)$ i obrnuto.
- Kako se funkcija gustine vjerovatnoće/raspodjele jednostavno određuje na osnovu predstavljanja rezultata mjerenja normalizovanim histogramom, to se ona i češće koristi **u teoriji električnih mjerenja**.

Matematičko očekivanje i varijansa

- U statistici i teoriji vjerovatnoće se vrijednost oko koje se gomilaju rezultati mjerenja naziva matematičko očekivanje na histogramu ili grafiku funkcije gustine vjerovatnoće. Ova veličina se često označava sa E (expectation) i definiše se za kontinualnu slučajnu promenljivu X sa funkcijom gustine raspodjele $f(x)$ kao:

$$E(X) \;\; ili \;\; \mu \;\; ili \;\; \mu_X$$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

- Matematičko očekivanje predstavlja vrijednost kojoj teži neko mjerenje, kao što smo ranije koristili srednju vrijednosti za skup mjerenja neke veličine. Ipak u zavisnosti od prirode mjerenja i same fizičke veličine, matematičko očekivanje ne mora odgovarati srednjoj vrijednosti mjerenja.
- Za diskretnu slučajnu promjenljivu (imamo konačan set od n mjerenja, za razliku od beskonačnog seta izraženog u integralnoj formi):

$$E(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i)$$

Matematičko očekivanje i varijansa

- Na primjeru mjerenja RR intervala kod EKG signala je pokazano da prikaz rezultata mjerenja nije potpun ukoliko ne postoji informacija o mjernoj nesigurnosti.
- U teoriji vjerovatnoće i statistici, kako bi se odredila mjerna nesigurnost tj. rasipanje ponovljenih mjerenja oko matematičkog očekivanja, definiše se **varijansa** slučajne promenljive

  (u slučaju električnih mjerenja varijansa ponovljenih mjerenja neke električne veličine).
- Za neprekidnu slučajnu promjenljivu X, sa funkcijom gustine verovatnoće f(X), varijansa se definiše kao:

$$D(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$$

VARIJANSA

- o matematičko očekivanje od razlike pojedinačnog mjerenja i matematičkog očekivanja mjerenja.
- o matematičko očekivanje odstupanja pojedinačnih mjerenja od procijenjene vrijednosti tog mjerenja
- o "rasipanje" rezultata oko matematičkog očekivanja.

Matematičko očekivanje i varijansa

- Neke osobine matematičkog očekivanja i varijanse:

$$E(a) = a$$

$$E(X + a) = E(X) + a$$

$$E(aX) = aE(X)$$

$$E(E(X)) = E(X)$$

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

$$D(a) = 0$$

$$D(X + a) = D(X)$$

$$D(aX) = a^2 D(X)$$

Matematičko očekivanje i varijansa

- Polazeći od izraza za varijansu $D(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right)$

$$D(X) = E(X^2) - 2E(X)E\big(E(X)\big) + \big(E(X)\big)^2$$

$$D(X) = E(X^2) - 2\big(E(X)\big)^2 + \big(E(X)\big)^2$$

$$D(X) = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

- Takođe, može se jednostavno zaključiti, da ako je D(X)=0 onda ne postoji odstupanje od mjerene vrijednosti tj. sve mjerene vrijednosti su identične.
- Varijansa je jednaka kvadratu standardne devijacije: $D(X) = s_X^2 = \sigma_X^2$
- Iako je varijansa matematički praktičnija, standardna devijacija ima istu fizičku jedinicu kao i X, što je smislenije za korišćenje. Ujedno, zbog njenog značenja kao širine funkcije gustine vjerovatnoće, pogodna je za prikazivanje grešaka prilikom mjerenja slučajne promjenljive.
- Varijansa predstavlja statistički moment drugog reda (kvadrat razlike mjerene vrijednosti i njenog matematičkog očekivanja).

Matematičko očekivanje i varijansa

- Relacija po kojoj se mogu odrediti momenti višeg reda $M(X)$:

$$M(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^p\right)$$

- Moment trećeg reda (Skew)

mjera asimetrije funkcije gustine vjerovatnoće slučajne promjenljive:

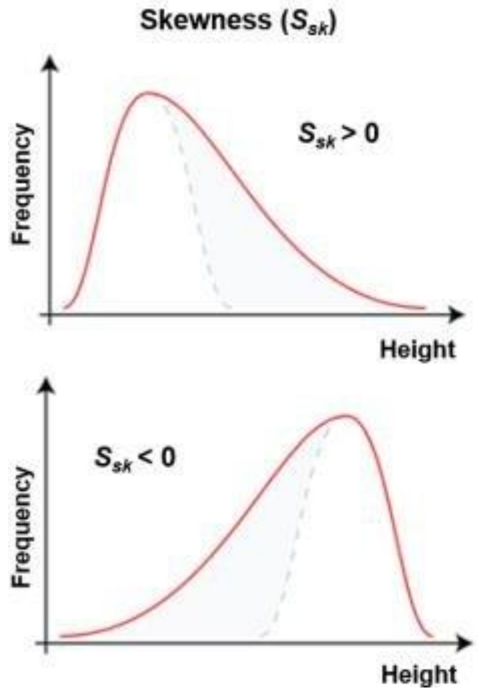
$$Skew = \frac{M_3}{\sigma_x^3} = \frac{E\left(\left(X - E(X)\right)^3\right)}{\sigma_x^3}$$

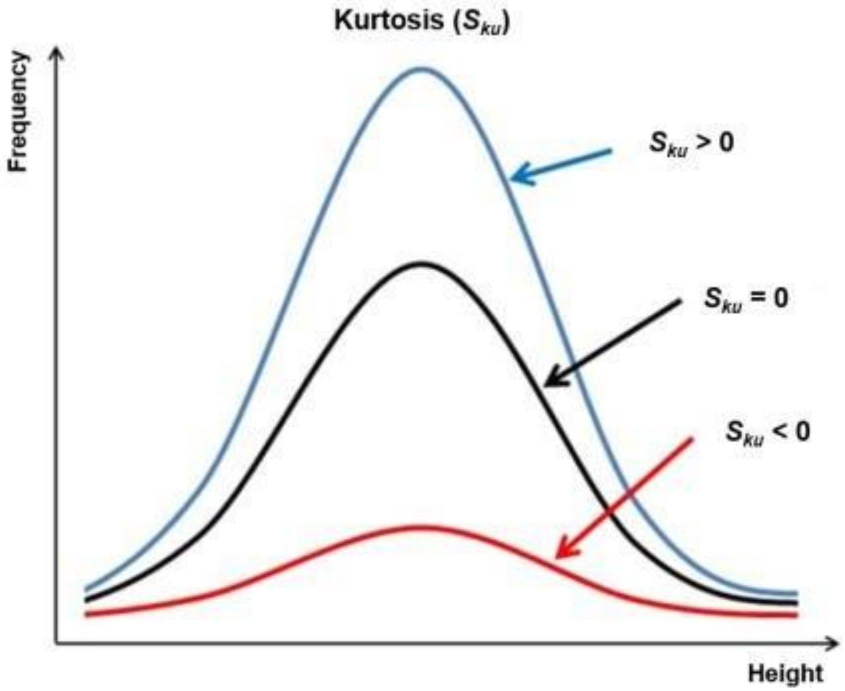
- Moment četvrtog reda (Kurtosis)

mjera strmine repova krive

(oštriji pad funkcije veći kurtosis)

$$Kurtosis = \frac{M_4}{\sigma_x^4} = \frac{E\left(\left(X - E(X)\right)^4\right)}{\sigma_x^4}$$





Gaussova funkcija gustine raspodjele

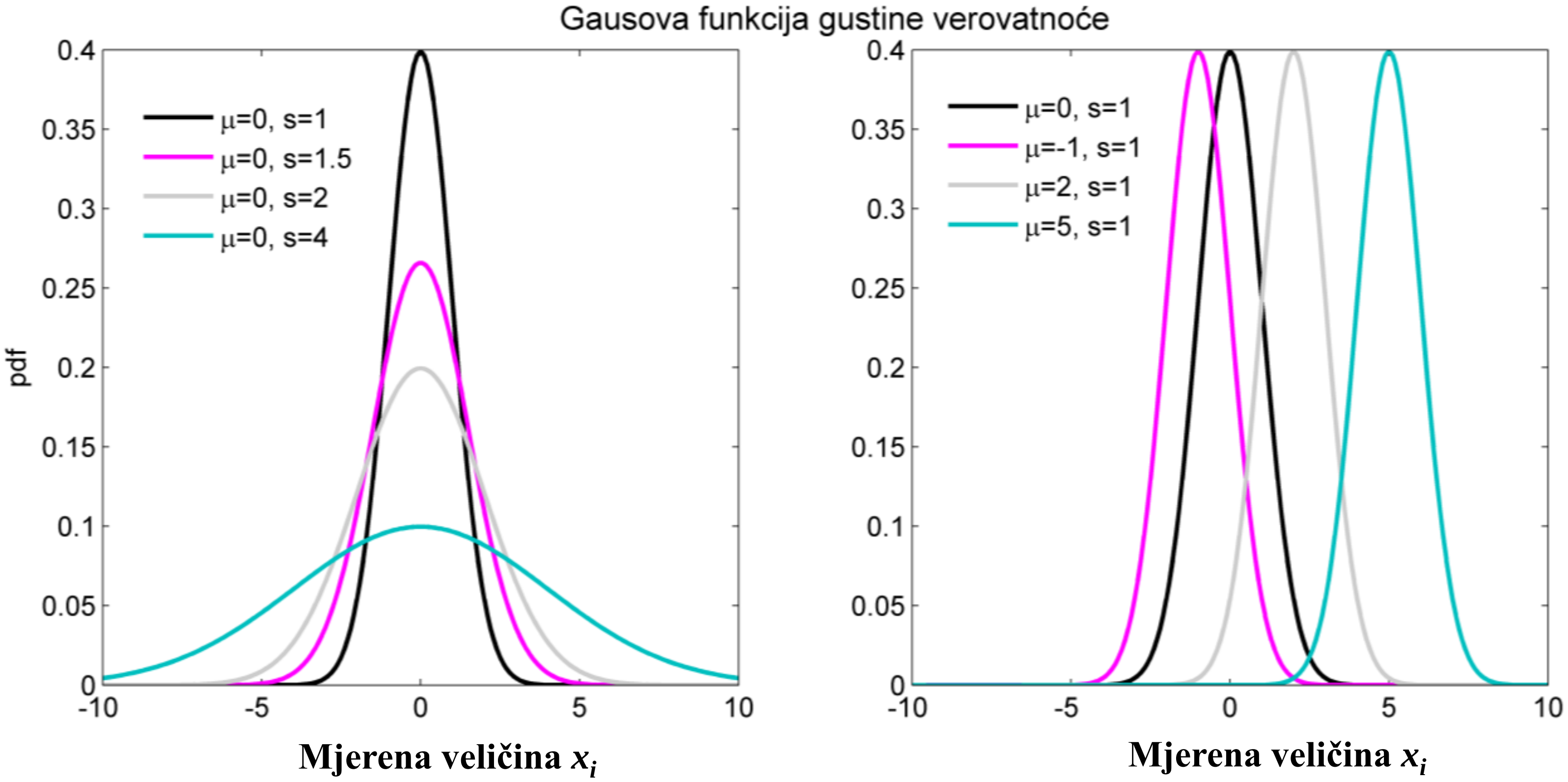
- Funkcija gustine vjerovatnoće koja opisuje Gausovu krivu, data je sljedećim izrazom:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \;, \quad \mu, \sigma - srednja\, vrij.\ i\ stand.dev.$$

- Kao što smo i ranije definisali, u diskretnom slučaju odnosno za konačan broj ponovljenih mjerenja, procijenjene vrijednosti μ i σ date su izrazima:

$$\mu = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \qquad\qquad \sigma = s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$

Za različite vrijednosti matematičkog očekivanja (srednje vrijednosti u slučaju Gausove raspodele) i varijanse, mogu se dobiti različiti oblici Gausove funkcije.



- **Matematičko očekivanje jednako je srednjoj vrijednosti kojoj teže mjerenja (oko koje se nagomilavaju), i to je maksimum Gaussove krive.**
- **Varijansa definiše odstupanje mjerenih vrijednosti od matematičkog očekivanja i to utiče na širinu Gaussove funkcije.**

Zadatak 1.2. Od ukupno 10.000 otpornika nazivne vrijednosti 1000 Ω izmjeren je uzorak od 200 otpornika. Koliko će otpornika od ukupne količine odstupati od nazivne vrijednosti preko ±0,5 %, ako je aritmetička sredina uzorka 1001,0 Ω, a standardna devijacija uzorka 2 Ω.

Rješenje:

Nazivna vrijednost otpornika je R_N=1000 Ω. Odstupanje ±0,5 % od nazivne vrijednosti je:

$$R_d=995\ \Omega$$

$$R_g=1005\ \Omega$$

Normalna ili Gausova raspodjela definiše se gustinom raspodjele y:

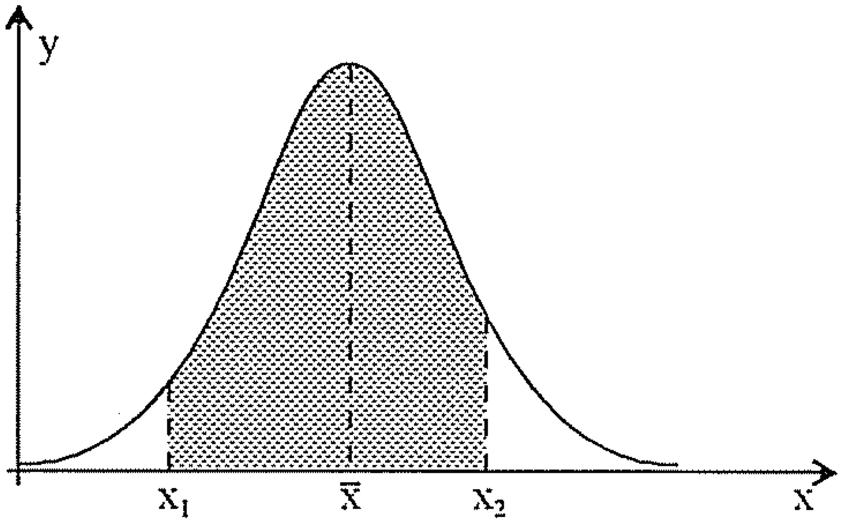
$$y=\frac{1}{s\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2}$$

gdje su: $\bar{x}$ aritmetička sredina uzorka, a s njegova standardna devijacija. Vjerovatnoća P $(x_1<x<x_2)$ da će promjenljiva x poprimiti

neku vrijednost između x_1 i x_2 dobija se integraljenjem gornje funkcije u granicama od x_1 i x_2:

$$P(x_1 < x < x_2) = \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\bar{x}}{s}\right)^2} \cdot dx$$

Ovaj integral predstavlja površinu ispod krive gustine nad intervalom od x_1 do x_2:



Za ovaj zadatak: $x_1 = R_d$; $x_2 = R_g$ i $\bar{x} = \overline{R}$.

Vjerovatnoća P da otpornici odstupaju od nazivne vrijednosti preko $\pm 0{,}5$ % data je izrazom:

$$P\left[(-\infty < R < R_d) \cup (R_g < R < \infty)\right] =$$

$$= \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{R_d} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{R-\bar{R}}{s}\right)^2} dR + \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_{R_g}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{R-\bar{R}}{s}\right)^2} dR =$$

$$= 1 - P(R_d < R < R_g) = 1 - \frac{1}{s\sqrt{2\pi}} \int_{R_d}^{R_g} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{R-\bar{R}}{s}\right)^2} dR = 1 - I$$

Uvodimo smjenu: $$x = \frac{R-\overline{R}}{s}; \quad dR = s \cdot dx$$

$$x_d = \frac{R_d - \overline{R}}{s}; \quad x_g = \frac{R_g - \overline{R}}{s}$$

$x_d = -3$

$x_g = 2$

Uvodjenjem gornjih smjena integral I svodi se na oblik:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_d}^{x_g} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-3}^{2} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = -\Phi(-3) + \Phi(2)$$

gdje je:

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{u} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx$$

poznati Gausov integral greške koji je za razne vrijednosti u dat u posebnim tablicama.

Rješenje integrala I je:

$$I = 0{,}9759$$

$$P = 1 - 0{,}9759 = 0{,}0241$$

$$N = P \cdot 10.000 = 241$$

Broj otpornika koji odstupaju od nominalne vrijednosti